INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 00175

1º semestre de 2015

Prof. Jürgen Stilck

Solução de alguns exercícios da lista 5

3.

a) Temos a função de Brillouin para um paramagneto composto de imãs elementares de spin J:

$$B(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{x}{2J}\right).$$

Vemos que, como coth é uma função impar, $B(-x) = -B(x)$. Por outro lado, a derivada de $B(x)$ em relação a x é:

$$B'(x) = \left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2 \left[1 - \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2J}\right)^2 \left[1 - \coth\left(\frac{1}{2J}x\right)^2\right].$$

Vemos que $B'(x)$ é uma função par, se anula apenas em $x \to \pm\infty$ tem seu máximo em $x = 0$ e $\lim_{x\to 0} B'(x) = (J+1)/3J$. Assim, concluimos que $B'(x) \geq 0$ e $B(x)$ é monotônica crescente. Como $\lim_{x\to\infty} \coth(x) = 1$ teremos que:

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = \frac{2J+1}{2J} - \frac{1}{2J} = 1.$$

b) Considerando o primeiro termo não nulo da série de Taylor de $B(x)$, teremos:

$$B(x) \approx B'(0)x = \frac{J+1}{3J}x.$$

c) Para $J = 1/2$, vem:

$$B(x) = 2\coth(2x) - \coth(x) = 2\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{(e^{x} + e^{-x})(e^{x} - e^{-x})} = \tanh(x).$$

d) Temos que, no limite $J \to \infty$:

$$\lim_{J \to \infty} \frac{2J+1}{2J} = 1$$

e

$$\lim_{J \to \infty} \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right) = \frac{1}{x}.$$

Logo:

$$\lim_{J \to \infty} B(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} = L(x).$$

5.

a) Vamos fazer uma antitransformada de Legendre: $u = f + Ts$. Temos, usando a energia livre dada, que:

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = 3R\ln(1 - e^{x}) - \frac{3Rx}{e^{x} - 1} - RD(x) + RxD'(x),$$

onde chamamos $x = \theta_D/T$. Por outro lado, podemos calcular a derivada:

$$D'(x) = -\frac{9}{x^4}\int_0^x \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi + \frac{3x^3}{x^3(e^{x} - 1)} =$$

$$-\frac{3}{x}D(x) + \frac{3}{e^{x} - 1}.$$

Sustituíndo isso na expressão da entropia, vem:

$$s = -3R\ln(1 - e^{-x}) + 4RD(x).$$

Daí podemois obter $u = f + Ts = u_0 + 3RTD(x)$.

b) Temos:

$$c = \frac{\partial u}{\partial T} = 3R[D(x) - xD'(x)] =$$

$$3R\left(4D(x) - \frac{3x}{e^{x} - 1}\right).$$

É possível mostrar, com algum trabalho, que a expressão entre parêntesis corresponde à função $C(x)$ definida na expressão (6.13) do livro texto.

c) Vamos ver o que acontece nos dois limites:

Altas temperaturas ($x \ll 1$): Notamos que para valores muito pequenos de x podemos substituir e^ξ por $1+\xi$ na expressão de $D(x)$. Então:

$$D(x) \approx \frac{3}{x^3} \int_0^x \xi^2 d\xi = 1.$$

Portanto, nesse limite,

$$f \approx u_0 + 3RT \ln(x),$$

$$u \approx 3RT,$$

$$c \approx 3R.$$

Baixas temperaturas ($x \gg 1$): Neste limite podemos substituir o limite superior da integral na expressão de $D(x)$ por ∞ e efetuar a integral, o que nos leva a:

$$D(x) \approx \frac{\pi^4}{5x^3}.$$

Assim, nesse limite,

$$f \approx u_0 - RT\frac{\pi^4}{5x^3},$$

$$u \approx u_0 + 3RT\frac{\pi^4}{5x^3},$$

$$c \approx \frac{12R\pi^4}{5x^3}.$$